

CONTINUITE ET LIMITES

Résultats à retenir :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel .
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition .
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I .

S'il existe une fonction g définie sur I , continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I , si et seulement si , $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie , alors C_f admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction (O, \vec{i}) au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

- Soit u et v deux fonctions . soit a , b et c finis ou infinis .
Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v \circ u(x) = c$
- Soit f , u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I .
Soit deux réels ℓ et ℓ' .
 - Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_a u = \ell$ et $\lim_a v = \ell'$
alors $\ell \leq \ell'$.
 - Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_a u = \lim_a v = \ell$
alors $\lim_a f = \ell$.

Les résultats énoncés ci-dessous restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini , à droite en a ou à gauche en a .

- Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I .
 - Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = +\infty$, alors
 $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$.
 - Si $f(x) \leq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = -\infty$, alors
 $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$.

Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a .

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

En particulier , si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
Soit a et b deux réels de I tel que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $]a, b[$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .
- L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$.
 - Le réel m est le minimum de f sur $[a, b]$.
 - Le réel M est le maximum de f sur $[a, b]$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infini).
 - Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
 - Si la fonction f est croissante et non majorée alors f possède une limite finie en b .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a, b]$ (a fini ou infini).
 - Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
 - Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites

1°/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

2°/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x - 1) - 1}{x^2 + 2x - 3}$

3°/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x}$

4°/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

5°/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x + 1}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x

6°/ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \sin x - \sqrt{2}}$

7°/ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes si elles existent :

1°/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

2°/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{x - 1}$

3°/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3+x^2}}{x - 1}$

4°/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| \cdot |x - 2|}{x(x^2 - x - 2)}$

5°/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + ax}$ où $a \in \mathbb{R}$.

$$2^{\circ} / \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}{2x}$$

$$3^{\circ} / \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + x - 1} + x$$

$$4^{\circ} / \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - mx, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

Exercice 4 :

Calculer les limites :

$$1^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \quad 2^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x} \quad 3^{\circ} / \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{5\cos^2 x + \sin^2 x - 4\cos x}$$

$$4^{\circ} / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x} \quad 5^{\circ} / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad 6^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x}$$

Exercice 5 :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ -2x^2 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{\pi} \\ x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) & \text{si } x \geq \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

1°/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$.

2°/ Etudier la continuité de f .

Exercice 6 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 3\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x - 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{-\cos x + \sin x + 2}{3x + 1} & \text{si } x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

1°/a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.

b) Montrer que $\forall x \geq \frac{\pi}{4} ; 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2°/ Etudier la continuité de f en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 7 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(mx^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel non nul.

1°/ Prouver que f_m est une fonction impaire.

2°/ Prouver que f_m est continue sur \mathbb{R} .

3°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m$.

Exercice 8 :

Soit $m \in \mathbb{R}^+$ et $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto m\sqrt{x^2 - m} + 2x$$

1°/ Préciser le domaine de définition de f_m .

2°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m$.

Exercice 9 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1°/ Déterminer le domaine de définition de f .

2°/ Calculer les limites éventuelles de f respectives en $+\infty$ et en $-\infty$.

3°/ Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 10 :

Soit la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1°/ Préciser le domaine de définition de f .

2°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3°/ Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 11 :

Soit a un paramètre réel et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2ax + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = ax^2 + 3x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2°/a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

b) Déterminer a pour que f soit continue en 1.

Exercice 12 :

$$f_m(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - mx \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel}$$

1°/ Montrer que $Df_m = \mathbb{R}$

2°/ Montrer que f_m est continue sur \mathbb{R}

3°/ Calculer suivant m , la limite de f_m en $+\infty$

4°/ Dans quel cas, la courbe C_{f_m} admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale

5°/ Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$

Exercice 13 :

$$f(x) = \frac{2x + \cos x}{x + 1}$$

1°/ Df 2°/ Calculer les limites de f à gauche et à droite de (-1) . Interpréter

3°/

a) Montrer que pour tout $x > -1$ on a :

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$. Interpréter4°/ Etudier la position de Cf par rapport à $\Delta : y = 2$ 5°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ **Exercice 14 :**

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{pour } x > 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.2°/ Ecrire le prolongement f_1 de f 3°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$. Interpréter géométriquement.**Exercice 15 :**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{pour } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$. Interpréter

2°/ a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$. Interpréter

3°/ Montrer que f est continue en 0

Exercice 16 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{2x+1} & \text{pour } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 0

2°/ a) Montrer que $C.f$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique Δ

b) Étudier la position de $C.f$ et Δ sur \mathbb{R}^-

3°/ Calculer la limite de f en $+\infty$ interpréter .

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5$$

2°/ On pose $X = x - 1$ lorsque $x \rightarrow 1$ alors $x \rightarrow 0$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x - 1) - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos X - 1}{X(X + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{X + 4} \cdot \frac{1 - \cos X}{X} = 0$$

$$3°/ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$$

4°/ On a : $E(x) \leq x \leq E(x) + 1 \Rightarrow x - 1 < E(x) \leq x$

Pour $x > 0$ on a : $x + 1 > 0$ d'où

$$\frac{x - 1}{x + 1} < \frac{E(x)}{x + 1} \leq \frac{x}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1 \quad \text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x + 1} = 1$$

Solution 2 :

$$1°/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4}{(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$2°/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})}{(x - 1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2) - (2x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}.$$

$$3^\circ / \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3+x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3+x^2})(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3+x^2})}{(x-1)(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3+x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(x-1)(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3+x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3+x^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

4°/ • On a : $x^2 - x - 2 \asymp (x+1)(x-2)$ et lorsque $x \rightarrow 2^+$,

$|x-2| = x-2$ et $|x| = x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| \cdot |x-2|}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Lorsque $x \rightarrow 2^-$, $|x-2| = -(x-2)$ et $|x| = x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x| \cdot |x-2|}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{3}.$$

on a : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x| \cdot |x-2|}{x(x^2 - x - 2)} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| \cdot |x-2|}{x(x^2 - x - 2)}$ donc la fonction

$x \mapsto \frac{|x| \cdot |x-2|}{x(x^2 - x - 2)}$ n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow 2$.

$$5^\circ / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2| + |x|}{|x^2| - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(|x| + 1)}{|x| \cdot (|x| - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = -1.$$

Solution 3 :

$$1^{\circ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

$$2^{\circ} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2})}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$3^{\circ} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + x - 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - \sqrt{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1 - \sqrt{3} < 0$$

$$4^{\circ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - m)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - m = 1 - m$$

$$\bullet \text{ Si } m < 1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - mx = +\infty$$

$$\bullet \text{ Si } m > 1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - mx = -\infty$$

$$\bullet \text{ Si } m = 1 :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Solution 4 :

$$1^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{1} = 1.$$

$$2^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}).$$

$$\begin{aligned} 3^{\circ} / \text{on a : } 5\cos^2 x + \sin^2 x - 4\cos x &= 5\cos^2 x + 1 - \cos^2 x - 4\cos x \\ &= 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = (2\cos x - 1)^2 \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{5\cos^2 x + \sin^2 x - 4\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)^2} = +\infty \text{ car } \sin \frac{\pi}{3} > 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)^2 = 0^+.$$

$$4^{\circ} / \text{On a, d'une part } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{et d'autre part : } -1 \leq -\sin^2 x \leq 0 \Rightarrow x - 1 \leq x - \sin^2 x \leq x \quad (2).$$

En multipliant les 2 encadrements (1) et (2) on obtient : $\forall x > 1$

$$\frac{x-1}{3} \leq \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x} \leq x \Rightarrow \forall x > 1, \frac{x-1}{3} \leq \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x} \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x} = +\infty.$$

5°/ Posons $X = \frac{1}{x}$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow 0^+$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin X}{X} = 1.$$

$$6°/ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x^2) - \sin(ax)}{x - a}.$$

Posons $h(x) = \sin(x^2) - \sin(ax)$. On a : $h(a) = 0$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x^2 - \sin a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(a) \text{ (car } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}).$$

Or $h'(x) = 2x \cos(x^2) - a \cos(ax)$ d'où $h'(a) = a \cos(a^2)$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} = a \cos(a^2).$$

Solution 5 :

$$1°/ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{1}{X} \sin X = \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{\sin X}{X} = 1$$

($X = \frac{1}{x}$, quand $x \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow 0^-$).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right). \text{ On pose } X = \frac{1}{x}; \text{ quand}$$

$x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow 0^+$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right] = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X^2} (\cos X - 1) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\cos X - 1}{X^2} = \frac{-1}{2}.$$

2°/ $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur \mathbb{R}^* (produit et composée de fonctions continues) alors f est continue sur $] -\infty, 0[$.

• $x \mapsto -2x^2$ est continue sur \mathbb{R} (fonction polynôme) donc f est continue sur $]0, \frac{1}{\pi}[$.

- $x \mapsto x^2 (\cos(\frac{1}{x}) - 1)$ est continue sur \mathbb{R}^* (produit et composée de fonctions continues) donc f est continue sur $] \frac{1}{\pi}, +\infty[$.

Continuité de f en $x_0 = 0$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin(\frac{1}{x})$.

On a : $\forall x < 0 : -1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$ d'où $x \leq x \sin(\frac{1}{x}) \leq -x$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^2 = 0$

on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en $x_0 = 0$.

Continuité de f en $x_0 = \frac{1}{\pi}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\pi}^-} -2x^2 = \frac{-2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\pi}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\pi}^+} x^2 (\cos(\frac{1}{x}) - 1) = \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi - 1) = \frac{-2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\pi}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\pi}} f(x) = f(\frac{1}{\pi}) \text{ donc } f \text{ est continue en } x_0 = \frac{1}{\pi}.$$

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R} .

Solution 6 :

$$1^{\text{o/a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3\sqrt{x^2(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} + 2x - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3|x|\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(-3\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x}) = +\infty$$

b) • On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, -1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq -\cos x \leq 1$

donc $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 - \cos x + \sin x \leq 4$

d'autre part on a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, 3x+1 > 0$ donc $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, f(x) \geq 0$

• On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, 2 - \cos x + \sin x \leq 4 \Rightarrow \frac{2 - \cos x + \sin x}{3x+1} \leq \frac{4}{3x+1}$

or $\frac{4}{3x+1} - \frac{2}{x} = \frac{-(2x+2)}{x(3x+1)} \leq 0$ car $x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$ d'où $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, f(x) \leq \frac{2}{x}$.

Conclusion : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$.

• On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2°/ • $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} x(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{-\cos x + \sin x + 2}{3x+1} = \frac{2}{3 \cdot \frac{\pi}{4} + 1}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\frac{3\pi}{4} + 1}$ donc f n'est pas continue à gauche en $\frac{\pi}{4}$, et f est

continue à droite en $\frac{\pi}{4}$.

Solution 7 :

1°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f_m(-x) = -f_m(x)$ donc f_m est impaire.

2°/ La fonction $x \mapsto \frac{\sin(mx^2)}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* comme composée et

produit de fonctions continues sur \mathbb{R}^* : $x \mapsto \sin(mx^2)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin(mx^2)}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(mX)}{X} = m$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = 0 \cdot m = 0 = f_m(0)$ d'où f_m est continue en 0.

Conclusion : f_m est continue sur \mathbb{R} .

3°/ $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(mx^2) \leq 1$ donc pour tout $x < 0$ on a :

$\frac{1}{x} \leq f_m(x) \leq \frac{-1}{x}$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 0$.

• $\forall x > 0, \frac{-1}{x} \leq f_m(x) \leq \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0$.

Solution 8 :

1°/ $D_{f_m} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - m \geq 0\}$

(*) $x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

• Si $m > 0$ (*) admet deux solutions $x' = \sqrt{m}$ et $x'' = -\sqrt{m}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$		\sqrt{m}	$+\infty$
$x^2 - m$		+		-	+

$D_{f_m} =]-\infty, -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}, +\infty[$.

• Si $m < 0 : x^2 - m > 0$; $D_{f_m} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 2^\circ/ \lim_{x \rightarrow -\infty} m\sqrt{x^2 - m} + 2x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} m|x| \sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2x \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(-m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2)
 \end{aligned}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} -m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2 = -m + 2$

m	$-\infty$	2		$+\infty$
$-m + 2$		+		-

- Si $m < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = +\infty$

- Si $m > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty$

$$\begin{aligned}
 - \text{ Si } m=2 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2-2} + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2-2) - 4x^2}{(2\sqrt{x^2-2} - 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-2} - x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} m\sqrt{x^2(1 - \frac{m}{x^2})} + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} mx\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x[m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2]
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2 = m + 2$$

m	$-\infty$	-2	$+\infty$
$m+2$		$- \quad 0 \quad +$	

$$- \text{ Si } m < -2 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = -\infty$$

$$- \text{ Si } m > -2 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 - \text{ Si } m = -2 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\sqrt{x^2+2} + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4(x^2+2)}{2x + 2\sqrt{x^2+2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2+2}} = 0
 \end{aligned}$$

Solution 9 :

1°/• La fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 1$ est définie sur \mathbf{R} et en particulier sur $[0, +\infty[$.

• La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie sur \mathbf{R}^* et en particulier sur

$] -\infty, 0[$ donc $D_f = \mathbf{R}$.

$$2^\circ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\bullet \text{ on a : } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ et}$$

$$\text{comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$3^\circ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 3x + 1 = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Solution 10 :

$$1^\circ / D_f = \mathbb{R}.$$

$$2^\circ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \sqrt{-x} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{x} = +\infty.$$

$$3^\circ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \sqrt{x} = 1 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 - \sqrt{-x} = -1 \neq f(0) \text{ donc } f \text{ n'est pas continue}$$

à gauche en 0 et par conséquent f n'est pas continue en 0.

Solution 11 :

$$1^\circ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^2 + 3x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2ax + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

$$2^{\circ}/a) \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 + 2ax + 1 = 2a + 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 3x = a + 3.$$

$$b) f \text{ est continue en } 1 \text{ ssi } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$$

$$2a + 2 = a + 3 \Leftrightarrow a = 1.$$

Solution 12 :

$$1^{\circ}/\text{On a : pour tout } x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0 (\Delta = 1 - 4 = -3 < 0)$$

$$\text{D'où : } Df_m = \mathbb{R}$$

$$2^{\circ}/P(x) = x^2 + x + 1$$

P est une fonction polynôme donc P est continue sur \mathbb{R}

et comme pour tout $x \in \mathbb{R} : P(x) > 0$ alors \sqrt{P} est continue sur \mathbb{R}

$$Q(x) = mx$$

Q est une fonction polynôme alors Q est continue sur \mathbb{R}

On a : $f = \sqrt{P} - Q$ d'où f est continue sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} 3^{\circ}/ \lim_{+\infty} f &= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - mx = \lim_{+\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - mx \right) \\ &= \lim_{+\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - m \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - m = 1 - m \end{cases}$$

m	-∞	1	+∞
1-m		+	0 -

$$\text{Pour } m < 1 : \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Pour $m > 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$

Pour $m = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4°/ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m$ est finie si $m = 1$

D'où pour $m = 1$, Cf_m admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = \frac{1}{2}$

$$5^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } m < 1 \\ -\infty & \text{pour } m > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } m = 1 \end{cases}$$

Pour $m \neq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - mx}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - m\right)}{\cancel{x}} = 1 - m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 - m)x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - mx - x + mx \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où : $D_m : y = (1 - m)x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à Cf_m au voisinage de $+\infty$

Solution 13 :

$$1^{\circ} Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$2^{\circ} \lim_{(-1)^-} f = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x + \cos x}{x + 1}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{(-1)^-} x + 1 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2x + \cos x = -2 + \cos(-1) < 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \lim_{(-1)^-} f = +\infty$$

$$\lim_{(-1)^+} f = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x + \cos x}{x + 1}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{(-1)^+} 2x + \cos x = -2 + \cos(-1) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 1) = 0^+ \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \lim_{(-1)^+} f = -\infty$$

D : $x = -1$ est une asymptote verticale à Cf

3^o/

a) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 2x - 1 \leq \cos x - 2x \leq 2x + 1$$

Or pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $x + 1 > 0$

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

b)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Et comme pour tout $x > -1$ on a :

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 2$

D : $y = 2$ est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} 4^\circ/d(x) = f(x) - y &= \frac{2x + \cos x}{x+1} - 2 = \frac{2x + \cos x - 2x - 2}{x+1} \\ &= \frac{\cos x - 2}{x+1} \end{aligned}$$

On a : pour tout $x \in Df$: $\cos x - 2 < 0$

• pour $x \in]-\infty, -1[$: $d(x) > 0$

d'où Cf est au dessus de Δ sur $] -1, +\infty[$

• pour $x \in]-1, +\infty[$: $d(x) < 0$

$\Rightarrow Cf$ est au dessous de Δ sur $] -1, +\infty[$

5°/ on a : $2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$

pour $x < -1$ on a : $x + 1 < 0$

$$\text{d'où : } \forall x < -1 : \frac{2x+1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x-1}{x+1}$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

$$\text{d'où } \lim_{-\infty} f = 2$$

Solution 14 :

$$1^\circ/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^2-1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable par continuité en 0

$$2^\circ / \begin{cases} f_1(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ f_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f_0 = 0 \end{cases}$$

$$3^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ?$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

$$\Rightarrow \text{Pour tout } x > 0 : 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} \text{ pour tout } x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) = -1 \end{aligned}$$

$D_1 : y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$

$D_2 : y = -1$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

Solution 15 :

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad (x < 0, \text{ alors } |x| = -x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$ donc $D : y = -1$ est une asymptote horizontale à f au voisinage de $-\infty$

2°/

a) On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

D'où : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} \leq 0$ pour $x > 0$

b) On a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0 \\ \text{et } \sqrt{x} > 0 : \frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$

D'où : $D' : y = 0$ est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0 \times 0 = 0$$

3°/ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} f = 0 = f(0)$

D'où f est continue en 0

b) $* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= 0 \times \frac{1}{2} = 0 = f'_d(0) \end{aligned}$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0

Cf admet deux demi-tangentes en 0

$$T_1 : \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \end{cases} ; T_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solution 16 :

$$1^{\circ} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x+1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} = 0 \times 1 = 0$$

On a : $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ alors f est continue en 0

$$2^{\circ}/a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x+2} = \frac{-1}{4}$$

D : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} b) \text{ Pour } x \in \mathbb{R}^- : f(x) - y &= \frac{x^2}{2x+1} - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{x^2}{2x+1} - \frac{2x-1}{4} \\ &= \frac{4x^2 - (2x-1)(2x+1)}{4(2x+1)} = \frac{1}{4(2x+1)} \end{aligned}$$

Pour $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$: $f(x) - y < 0$ donc Cf est en dessous de Δ

Pour $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$: Cf est au dessus de Δ

$$3^{\circ}/\text{Pour } x > 0 : -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

D : $y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$.